Sur un papyrus mathématique grec conservé à la Bibliothèque de Genève

Par Jacques Sesiano, Genève

Dans cette même revue, M. J. Rudhardt a publié voici quelques années un texte mathématique grec apparaissant au verso du papyrus 259, provenant d'Egypte, de la Bibliothèque Publique et Universitaire de Genève[1]. On y trouve la résolution de trois problèmes sur des triangles rectangles – donc des triangles dans lesquels l'hypoténuse r et les côtés perpendiculaires p et q sont liés par la relation

$$p^2 + q^2 = r^2$$

attribuée par certains Grecs à Pythagore[2]. Le texte de ces problèmes a été lu – ou rétabli – par M. Rudhardt avec beaucoup de soin. Aussi notre étude se réduira-t-elle à une nouvelle interprétation mathématique de la résolution de ces problèmes, ainsi qu'à des remarques sur leur rôle et leur place dans les mathématiques antiques.

Notre interprétation mathématique diffère en ce sens que nous attribuons aux résolutions de ces problèmes un caractère *algébrique*. A ce propos, on ne saurait trop s'inscrire en faux contre l'opinion fort répandue, et héritée de l'époque des traductions scientifiques médiévales, que les méthodes algébriques apparaissent pour la première fois avec les Arabes – ou bien qu'elles seraient fondamentalement étrangères à l'esprit mathématique grec pour lequel il n'y aurait d'autres vérités que celles que l'on établit more geometrico. Certes, nous accorderons sans peine que le raisonnement géométrique occupe en Grèce une position privilégiée dans la recherche ou la démonstration de théorèmes. Mais les preuves de l'existence, parallèlement, d'une algèbre grecque utilisée dans des problèmes numériques sont, elles aussi, bien établies.

1. Il y a d'abord les dix livres qui nous sont parvenus, sur les treize originels, de l'Arithmetica de Diophante[3]. Tant l'usage, dans l'écriture, d'un symbo-

1 *Trois problèmes de géométrie, conservés par un papyrus genevois,* Mus. Helv. 35 (1978) 233–240.

2 Comme le rapporte p. ex. Proclus, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii* (ed. G. Friedlein, Leipzig 1873) 426. En fait, ce théorème était déjà connu une quinzaine de siècles auparavant en Mésopotamie, et on le retrouve aux Indes et en Chine un peu après l'époque de Pythagore (v. ci-dessous).

3 Six de ces livres ont été transmis par les Byzantins, et quatre autres livres nous sont parvenus dans une traduction arabe du IXe siècle. Le texte grec critique a été édité, avec une traduction latine, par P. Tannery (*Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis* I–II,

lisme proprement mathématique que, dans les résolutions, d'une procédure algébrique – par laquelle le système d'équations proposé est réduit à une équation ne contenant plus qu'une inconnue et des grandeurs connues –, montrent suffisamment que le titre de «père de l'algèbre» attribué à Diophante dans les temps modernes n'est pas usurpé[4].

2. D'un aspect fort différent sont les problèmes que l'on trouve résolus dans des papyri d'époque hellénistique ainsi que dans le livre XIV de l'Anthologia graeca[5]. Il n'y a pas de formalisme algébrique, pas ou guère d'explications, et la résolution consiste généralement en une suite d'opérations numériques appliquées mécaniquement. Pourtant, il apparaît que ces recettes de calcul sont elles aussi de nature algébrique: remplaçant les grandeurs cherchées et les grandeurs données par des symboles conventionnels, on verra apparaître la formule qui est utilisée pour résoudre le problème, et qui a aussi été utilisée pour le *poser.*

Cette seconde catégorie de problèmes, algébriques dans le fond mais point dans la forme, est ancienne: les premiers exemples en apparaissent dans des textes cunéiformes, et divers indices suggèrent qu'ils remontent à l'époque sumérienne, vers la fin du troisième millénaire[6]. Relativement peu d'exemples grecs de tels problèmes ont survécu, sans rapport en tout cas avec l'importance qu'ils durent avoir dans l'enseignement élémentaire. Mais il est significatif que le premier livre de l'Arithmetica de Diophante regroupe les plus caractéristiques de ces problèmes, à cette différence près que la formulation y est dépouillée de toute signification concrète des grandeurs et que la résolution y devient proprement algébrique. L'existence de ce pont jeté entre l'algèbre «populaire» et l'algèbre abstraite n'est sans doute pas le fait du hasard: en joignant la nouveauté de la forme et la tradition du contenu, Diophante initie avec douceur l'étudiant aux techniques du calcul utilisant inconnue et équations.

Aveuglés qu'ils étaient par la splendeur des grands classiques scientifiques

Leipzig 1893–1895). Quant à l'édition du texte arabe, on la trouvera avec une traduction anglaise et un commentaire dans: J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā* (New York 1982).

4 Même si ce «père» est lui-même le rejeton d'une lignée de savants que son ouvrage a précipités dans l'oubli. Diophante n'a guère plus créé l'algèbre ex nihilo qu'Euclide la géométrie ou Apollonius de Perge la théorie des sections coniques.

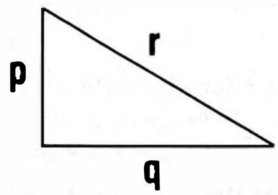
5 Quelques exemples de ces problèmes, avec les références nécessaires, dans B. L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in ancient civilizations* (Berlin/Heidelberg 1983) 163–170, ou dans J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*[4] (Berlin 1980), en diverses places (v. en particulier l'index sous «Anthologia graeca»).

6 Outre les ouvrages déjà cités (n. 5) et les *Mathematische Keilschrift-Texte* I–III d'O. Neugebauer (Berlin 1935) ainsi que les *Textes mathématiques babyloniens* de F. Thureau-Dangin (Leyde 1938), on peut aussi consulter le *Mathematik der Babylonier* de K. Vogel (= Mathematische Studienhefte, Heft 2, Hannover/Paderborn 1959). Parmi les travaux plus récents ou en cours sur les mathématiques babyloniennes, il faut mentionner ceux de E. Bruins (Amsterdam), J. Friberg (Göteborg), et J. Høyrup (Roskilde).

grecs, les historiens des mathématiques ont quelque peu négligé l'importance de cette mathématique plus populaire. Son rôle n'est pourtant point insignifiant. Etant d'abord plus accessible, donc plus répandue, elle est aussi plus solidement enracinée et par suite moins sujette aux vicissitudes politiques ou culturelles; elle entretint l'usage du calcul et le souvenir des formules de base à travers des problèmes souvent récréatifs qui devinrent des divertissements de société. C'est cette mathématique que l'on voit ainsi continuer à fleurir lorsque leur difficulté met les grands traités hors de portée de l'élite scientifique byzantine. C'est encore cette mathématique qui resta vivante dans le Haut Moyen Age, comme en témoigne la composition de ce plaisant recueil des Propositiones ad acuendos iuvenes attribuées à Alcuin, et puisées sans doute à des sources du Bas-Empire[7]. N'étant d'autre part pas soumise à l'autorité et à la rigueur des grands classiques, cette mathématique permettra aux mathématiciens de faire preuve de plus de souplesse et de plus d'audace: nous avons récemment montré que c'est dans des types de problèmes récréatifs, issus d'une tradition grecque, que des mathématiciens médiévaux considérèrent pour la première fois la possibilité d'admettre des solutions en nombres négatifs[8].

Résumons-nous. Outre l'algèbre de Diophante, on trouve en Grèce une algèbre plus simple et plus ancienne, s'exprimant souvent à travers des formules utilisées dans divers problèmes numériques. Ces problèmes, généralement à données concrètes, apparaissent sous la forme tantôt de récréations mathématiques, tantôt de calculs des éléments inconnus d'une certaine figure. Une illustration de ce second cas est le groupe des problèmes du papyrus de Genève, dont l'étude mathématique suit ci-après.

Considérons donc le triangle rectangle d'hypoténuse r et de côtés perpendiculaires p (hauteur) et q (base).



Dans les problèmes du papyrus, ces trois longueurs auront des valeurs entières, à savoir 3, 4, 5 dans les deux premiers problèmes et 6, 8, 10 dans le dernier[9].

7 Outre la parenté de certains problèmes avec ceux de l'*Anthologia graeca*, deux (nos 39 et 52) frappent par leur mention d'un chameau, un animal peu propre à inspirer un membre de l'entourage de Charlemagne pour un problème concret. Le texte de ces *Propositiones* a été édité par Migne et al. dans la Patrologia latina (vol. CI, coll. 1143–1160), récemment par M. Folkerts (Denkschriften d. österr. Akad. d. Wiss., math.-naturwiss. Kl., Bd. 116, 6, 1978).

8 *The Appearance of negative solutions in mediaeval mathematics*, Archive for Hist. of Exact Sciences 32 (1985) 105–150.

9 Ces choix n'ont rien de surprenant. Le triangle de côtés 3, 4, 5 est le plus simple de tous les

Premier problème: Connaissant l'hypoténuse r et le côté p, trouver le troisième côté q.

La réponse est immédiate:

$$q = \sqrt{r^2 - p^2}$$

L'auteur calcule successivement r^2, p^2, puis $r^2 - p^2$, dont il prend la racine[10].

N.B.: On appliquerait également la relation de Pythagore si les quantités connues étaient des paires de côtés différentes, à savoir r et q ou bien p et q. Ce cas banal n'est donc pas traité par l'auteur.

Remarque: De tels problèmes – donc des applications directes du théorème de Pythagore – apparaissent déjà dans les mathématiques mésopotamiennes[11]. On en trouve aussi avant notre ère dans les mathématiques chinoises[12]. Il n'est pas nécessaire d'y voir une influence, dans ce dernier cas du moins: une même question mathématique posée sur une même figure amènera une réponse qui, si elle est correcte, doit être la même.

Deuxième problème: Connaissant la somme de l'hypoténuse et d'un côté, ainsi que la longueur du troisième, trouver les longueurs respectives des côtés dont on connaît la somme.

Connaissant donc $r+p$ et q, et sachant que $r^2 = p^2+q^2$, trouver r et p.

Etablissons d'abord la formule de résolution. Comme $q^2 = r^2-p^2 = (r+p)(r-p)$, nous aurons que

$$r-p = \frac{q^2}{r+p}$$

et $r-p$, exprimable à l'aide de grandeurs connues, est connu. Dès lors que $r+p$ et $r-p$ sont connus,

$$\frac{1}{2}[(r+p)-(r-p)] = p$$

est connu.

Ainsi, la relation finale exprimant l'inconnue p en fonction des grandeurs données est:

$$p = \frac{1}{2}\left[(r+p) - \frac{q^2}{r+p}\right]$$

C'est bien selon cette formule que l'auteur mène sa résolution (avec les données $r+p = 8$, $q = 4$): il calcule d'abord q^2 (lignes 18–19 du texte grec), puis

$$\frac{q^2}{r+p}$$

triangles rectangles en nombres rationnels. L'auteur a doublé les longueurs des côtés dans le troisième cas.

10 La figure (voir la photographie à la fin de l'article de M. Rudhardt) indique aussi l'aire du triangle, soit 6; cette valeur n'intervient toutefois pas dans les calculs.

11 Voir p. ex. van der Waerden, op. cit. (n. 5) 57.

12 Voir le même ouvrage, pp. 49–50.

(ll. 19–20), ensuite la différence entre crochets dans la formule ci-dessus (ll. 20–21), qu'il divise par deux (l. 21).

Maintenant qu'il a déterminé p, il ne reste à l'auteur qu'à soustraire de $r+p$ la valeur trouvée pour connaître r (ll. 22–23).

N.B.: Les rôles de p et de q étant parfaitement permutables, le cas où $r+q$ et p sont donnés se déduit du précédent. De même, on traiterait comme ci-dessus le cas où l'on se donnerait par avance la différence $r-p$.

Remarques: Le même problème, résolu de la même manière avec la formule équivalente

$$p = \frac{1}{2}\left[\frac{(r+p)^2-q^2}{(r+p)}\right]$$

apparaît en Mésopotamie, tout comme le cas où la différence $r-p$ est donnée[13].

Dans le problème 29 du Livre I de son Arithmetica, Diophante enseigne le moyen de déterminer deux nombres dont on connaît la somme ainsi que la différence des carrés; c'est, sans la condition que la base soit rationnelle, le même problème.

Troisième problème: Connaissant la somme des deux côtés perpendiculaires ainsi que l'hypoténuse, trouver les longueurs des côtés perpendiculaires.

Connaissant donc $p+q$ et r, et sachant que $r^2 = p^2+q^2$, trouver p et q.

Etablissons la formule de résolution. Comme

$$(p+q)^2 = p^2+2p\cdot q+q^2 = r^2+2p\cdot q,$$

nous aurons que

$$2p\cdot q = (p+q)^2-r^2,$$

où les termes à droite sont connus; $p\cdot q$ sera donc connu.

D'autre part,

$$(p-q)^2 = p^2-2p\cdot q+q^2 = r^2-2p\cdot q,$$

soit, en utilisant la relation précédemment établie,

$$(p-q)^2 = 2r^2-(p+q)^2.$$

Ainsi, $p-q$ est calculable. Dès lors que $p+q$ et $p-q$ sont connus,

$$\frac{1}{2}[(p+q)-(p-q)] = q$$

est connu.

Ainsi, la relation finale exprimant l'inconnue q en fonction des grandeurs données est:

13 Voir encore l'ouvrage de van der Waerden, pp. 57–59 et (pour une source chinoise) pp. 50–53.

$$q = \frac{1}{2}\left[(p+q) - \sqrt{2r^2-(p+q)^2}\right]$$

C'est sans doute à l'aide de cette formule que l'auteur a résolu son problème (avec les données $p+q = 14$, $r = 10$): il calcule d'abord r^2 (l. 32), ensuite $(p+q)^2$, le double de r^2, la différence $2r^2-(p+q)^2$ puis sa racine (ll. 33–37 [?]); il détermine alors la différence entre crochets dans la formule ci-dessus (ll. 37–38), qu'il divise par deux (l. 38 [?]), ce qui lui donne la valeur de q (l. 39).

Maintenant qu'il a déterminé q, il ne lui reste plus qu'à soustraire la valeur trouvée de $p+q$ afin de trouver p (l. 40).

Remarque: Dans le problème 28 du Livre I de son Arithmetica, Diophante enseigne la détermination de deux nombres dont on connaît la somme ainsi que la somme des carrés; c'est, sans la condition de rationalité de l'hypoténuse, le même problème. Remarquant l'existence d'un problème semblable chez les Mésopotamiens, nous disions dans notre étude sur Diophante[14] que la résolution de ce problème à l'aide de l'identité

$$2(p^2+q^2) = (p+q)^2+(p-q)^2$$

devait procéder d'une tradition ancienne. Notre papyrus vient planter un nouveau jalon grec dans la remontée vers cette tradition.

14 Op. cit. (n. 3, in fine) 236.